APRIL/MAY 2025

CMA51/BMA51 — ABSTRACT ALGEBRA

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL questions.

1. Define Subgroup.

   உட்குலட் வரையறு.



2. Define a is congruent b.

   a மட்டு bயை வரையறு.

3. Define homomorphism.

   காப்பமைவியத்தை வரையறு.

4. Give an example of homomorphism.

   காப்பமைவியத்திற்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு தருக.

5. State Cayley's theorem.

கெயிலி தேற்றத்தை எழுதுக.

6. Find $\theta \psi$ if $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ and $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ மற்றும் $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ லிருந்து $\theta \psi$ யைக் காண்க.

7. Define division ring or share field.

பரிமாறாக் கலத்தை அல்லது பிரிவு வளையத்தை வரையறு.

8. Define Zen divisor.

சுழி அல்லது பூஜ்ஜிய வகுப்பானை வரையறு.

9. Define imbedded.

உட்பதிக்கப்பட்டதை வரையறு.

10. Define Euclidean ring.

யூக்ளிடியன் வளையத்தை வரையறு.

17. State and prove Cauchy's theorem for abelian groups.

அபீலியன் குலத்தை பொறுத்து காட்ஷி தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

18. State and prove Cayley's theorem.

கெய்லி தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

19. State and prove fundamentals theorem of homomorphism.

காப்பு அமைவியத்தின் அடிப்படைத் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.



20. State and prove unique factorization theorem.

காரணி ஆக்கம் தேற்றத்தை எழுதி நிரூபி.

———————

(b) If R is a commutative ring with unit element and M is an ideal of R. Prove that M is a maximal ideal of R iff $\frac{R}{M}$ is a field.

R என்பது பரிமாற்று வளையம் எனில் அவை ஒரே வரையறையை பெற்றுள்ளது. மற்றும் M என்பது Rன் சீர்மம் எனில் M என்பது Rன் உச்சநிலை சீர்மம் எனில் $\Leftrightarrow \frac{R}{M}$ என்பது கலம் என நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If G is a group. Prove that

(a) The identify element of G is unique

(b) Every $a \in G$ has a unique inverse in G

(c) For every $a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$

(d) For all $a, b \in G, (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

G என்பது குலம் எனில் நிறுவுக.

(அ) Gன் சமனி உறுப்பு சமம்

(ஆ) $a \in G$ என்பது Gன் சமனி நேர்மாறு

(இ) அனைத்து $a \in G$க்கும் $(a^{-1})^{-1} = a$

(ஈ) அனைத்து $a, b \in G$க்கும் $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$



SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) If H is a nonempty finite subset of a group G and H is closed under multiplication. Prove that H is a subgroup of G.

H என்பது வெற்று முடிவுறு கணத்தின் குலம் G, H என்பது பெருக்கலின் கீழ் அடைவுப்பண்பை பெற்றுள்ளது எனில் H என்பது Gன் உட்கணம் என நிரூபி.

Or

(b) Let G be the group of all nonzero complex numbers $a+bi$ (a, b real numbers not both 0) under multiplication and let $H\{a+bi \in G / a^2+b^2=1\}$. Prove that H is a subgroup of G.

G என்ற குலமானது பூஜ்ஜியமற்ற கலப்பெண் $a+bi$ (a மற்றும் b என்பது பூஜ்ஜியமற்ற மெய் எண்கள்) பெருக்கலின் கீழ் $H\{a+bi \in G / a^2+b^2=1\}$ எனில் H என்பது துணை குலம் என நிரூபி.

12. (a) Prove that if N is a normal subgroup of G iff $g N g^{-1} = N$ for every $g \in G$.

N என்பது Gன் சாதாரண துணை குலம் எனில் $\Leftrightarrow g N g^{-1} = N \quad \forall g \in G$வை நிரூபி.

Or

(b) Prove that a subgroup N of G is a normal subgroup of G iff the product of two right cosets of N in G is again a right coset of N in G.

G-ன் N என்ற உட்குலம் நேர்மையாக இருப்பதற்கு தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை N-ன் இரண்டு வல இணை கணங்களின் பெருக்கல் N-ன் ஒரு வல இணைகணம் என நிறுவுக.

13. (a) If G is a group prove that $A(G)$ the set of all automorphisms of G is also a group.

G என்பது குலம் எனில் $A(G)$ என்ற இயல்நிலையை குலம் என நிருவுக.

Or

(b) Prove that $\mathcal{J}(G) \cong G/N$ where $\mathcal{J}(G)$ is a group of inner automorphisms of G and z is the center of G.

$\mathcal{J}(G)$ என்பது இயல்நிலை உட்குலட் மற்றும் z என்பது Gன் மையம் எனில் $\mathcal{J}(G) \cong G/N$ என நிறுவுக.

14. (a) If P is a prime number. Prove that JP, the ring of integers mod P is a field.

P என்பது பகு எண் எனில் JP என்பது மட்டு P நலத்தின் வளையம் என நிறுவுக.

Or

(b) If ϕ is a homomorphism of R into R' then prove that

(i) $\phi(0) = 0$

(ii) $\phi(-a) = -\phi(a) \cdot \forall a \in R$



ϕ என்பது R மற்றும் R'ன் காப்பமைவு எண் எனில்

(i) $\phi(0) = 0$

(ii) $\phi(-a) = -\phi(a) \cdot \forall a \in R$ என நிறுவுக.

15. (a) Let R be a commutative ring with unit element whose only ideal are (0) and R itself. Prove that R is a field.

R என்பது பரிமாற்று வளையம் எனில் அதன் அலகு கூறுகளின் சீர்மம் (0) மற்றும் R ஆகும் எனில் R என்பது கலம் என நிறுவுக.

Or